

Peti domaći zadatak iz predmeta Linearna algebra 1

Preduslov: Pročitati udžbenik do kraja četvrte glave

1. Operator $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(M_{\leq 3} \rightarrow M_{\leq 3})$ je zadat sa:

$$\mathcal{T}f = f' - 2f''.$$

- Napisati matricu operatora \mathcal{T} .
- Koliki je $\text{rank } \mathcal{T}$ i $\text{defect } \mathcal{T}$?
- Naći $\text{Ker } \mathcal{T}$.

2. Razmotrimo operator $\mathcal{R}_{\pi/4}$ rotacije vektora za ugao $\pi/4$ u ravni suprotno kazaljki na satu. Izabрати dvije različite baze u ravni i napisati matrice ovog operatora u tim bazama. Koliki je $\text{rank } \mathcal{R}_{\pi/4}$?

3. Razmotrimo operator $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$ zadat sa:

$$\mathcal{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Napisati matrice ovog operatora u bazama

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad s = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Koliki je $\text{rank } \mathcal{Q}$?
- Naći jednu bazu u $\text{Im } \mathcal{Q}$.

4. Neka su matrice A i B slične. Tada su i matrice A^k i B^k slične za svaki prirodan broj k . Dokazati.

5. Slične matrice imaju isti rang. Objasniti zašto.

6. U prostoru \mathbb{R}^2 su date dvije baze

$$q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Naći matricu prelaska iz baze q u bazu r .
- Naći matrice $P(q)$ i $P(r)$ operatora projekcije \mathcal{P} na x -osu u bazama q i r .
- Pokazati da su matrice $P(q)$ i $P(r)$ slične.

7. U prostoru $M_{\leq 2}$ su date dvije baze:

$$q = \{1 - t + 2t^2, t - t^2, 2 + t\}, \quad r = \{5t, t^2, 1 + t\}.$$

Operator $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(M_{\leq 2} \rightarrow M_{\leq 2})$ je zadat sa:

$$\mathcal{T}f = 2f - f'' \quad \forall f \in M_{\leq 2}.$$

- Naći matricu prelaska iz baze q u bazu r .
- Naći matricu operatora \mathcal{T} u bazama q i r .
- Provjeriti da su matrice $T(q)$ i $T(r)$ slične.